第 41 講　総合問題(9)

1　a を定数とする．関数　$f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$　の最小値を a を用いて表せ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1)　実数 x，y について，$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$　の最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

(2)　a を負の実数とする．$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$　を満たす x，y が隣り合う整数のとき，a の最大値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　座標平面上で円 C：$x^2+(y-4)^2=16$　上の異なる２点 P，Q に対し，線分 PQ を１：３に内分する点を M とする．下の問いに答えよ．

⑴　点 P を原点に固定して，点 Q を円 C 上で動かしたときの点 M の軌跡を求めよ．

⑵　２点 P，Q が円 C 上を動くとき，点 M が動く範囲を図示せよ．

［2］　２つの関数　$y=ax^2+b$，$y=|(x-1)(x+1)|$　のグラフが共有点をもつための必要十分条件を a，b を用いて表し，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を座標平面上に図示しなさい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第41講　総合問題(9)

※この講の練習問題より「実践問題」となります．講義問題の内容と必ずしも一致しません．

a を実数とする．x に関する方程式　$\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3)$　……①　が異なる2つの実数解をもつとき，a の取りうる値の範囲を求めたい．

①の真数条件により，$a>$ [ア] のとき $x>\dfrac{a+3}{4}$　$a\leqq$ [ア] のとき $x>1$ である．

このとき①を変形すると　$(x-1)^{[イ]}=4x-a-3$　……②　である．左辺，右辺をそれぞれ x の関数と考えると，2つの関数のグラフの共有点の x 座標のうち，①の真数条件を満たすものが2つ存在すればよい．$a>$ [ア] のとき　グラフから②が異なる2実数解をもてばそれは必ず真数条件を満たすことがわかり，このとき a の取りうる値の範囲は

[ウ] $<a<$ [エ] である．同様に $a\leqq$ [ア] のときも考えて，求める a の範囲は

[オ] $<a<$ [カ] である

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　総合問題(9)

1　a を定数とする．関数　$f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$　の最小値を a を用いて表せ．

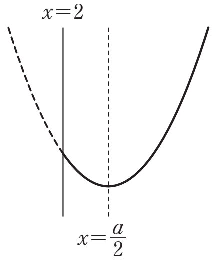
(i)　$x\geqq 2$　のとき　$f(x)=x^2-a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+2a$

この範囲における最小値は

$2\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$a\geqq 4$ のとき　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a$

$\dfrac{a}{2}\leqq 2$　つまり　$a\leqq 4$ のとき　$f(2)=\dfrac{a^2}{4}+4$

よって　$x\geqq 2$ における最小値 m_1 は　$m_1=\begin{cases}2a & (a\geqq 4)\\ \dfrac{a^2}{4}+4 & (a\leqq 4)\end{cases}$



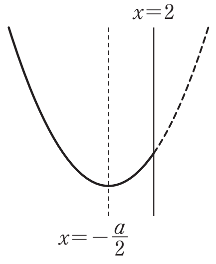
(ii)　$x\leqq 2$　のとき　$f(x)=x^2+a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-2a$

この範囲における最小値は

$-\dfrac{a}{2}\leqq 2$　つまり　$a\geqq -4$ のとき　$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$

$2\leqq -\dfrac{a}{2}$　つまり　$a\leqq -4$ のとき　$f(2)=\dfrac{a^2}{4}+4$

よって　$x\leqq 2$ における最小値 m_2 は　$m_2=\begin{cases}-2a & (a\geqq -4)\\ \dfrac{a^2}{4}+4 & (a\leqq -4)\end{cases}$

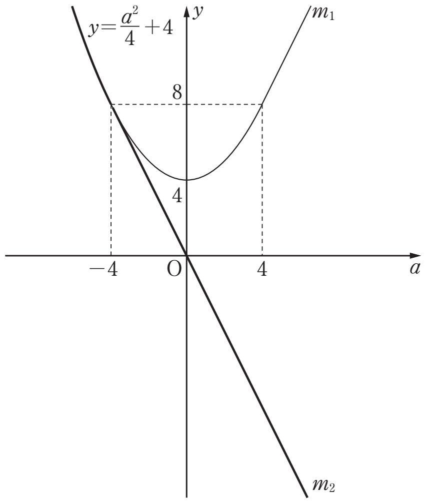


m_1，m_2 のうち，大きくない方が求める最小値である．

したがって，m_1 と m_2 のグラフ（右図）のうち，上になってない方が最小値をとるグラフである．
ゆえに求める最小値は

$a\leqq -4$　のとき　$\dfrac{a^2}{4}+4$

$-4\leqq a$　のとき　$-2a$



ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) 実数 x，y について，$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$ の最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

(2) a を負の実数とする．$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$ を満たす x，y が隣り合う整数のとき，a の最大値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

(1) $f(x,\ y)=4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$ とおくと

$$f(x,\ y)=4x^2-4(3y-1)x+12y^2-18y+7$$
$$=4\left\{x-\frac{1}{2}(3y-1)\right\}^2-(3y-1)^2+12y^2-18y+7$$
$$=4\left\{x-\frac{1}{2}(3y-1)\right\}^2+3y^2-12y+6$$
$$=\{2x-(3y-1)\}^2+3(y-2)^2-6$$

よって　$f(x,\ y)$ は　$x=\dfrac{1}{2}(3y-1)$　かつ　$y=2$

つまり　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{2},\ y=2}$ **のとき　最小値 −6 をとる．**

(2) $f(x,\ y)=a$　つまり $\{2x-(3y-1)\}^2+3(y-2)^2-6=a$　で a が負の値のとき

x，y は実数より　$\{2x-(3y-1)\}^2+3(y-2)^2<6$　……①

よって　$3(y-2)^2<6$　　$(y-2)^2<2$

y は整数より　$(y-2)^2\leqq 1$　　$-1\leqq y-2\leqq 1$　　$1\leqq y\leqq 3$　　よって　$y=1,\ 2,\ 3$

$y=1$ のとき　①より　$(2x-2)^2+3<6$　　$(x-1)^2<\dfrac{3}{4}$

　これを満たす整数 x は $x=1$ のみ

$y=2$ のとき　①より　$(2x-5)^2<6$　　$(2x-5)^2\leqq 5$　　$-\sqrt{5}\leqq 2x-5\leqq\sqrt{5}$

　つまり　$-2\leqq 2x-5\leqq 2$　より　$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{7}{2}$　　よって　$x=2,\ 3$　のみ

$y=3$ のとき　①より　$(2x-8)^2+3<6$　　$(x-4)^2<\dfrac{3}{4}$　　よって　$x=4$　のみ

これらのうち，x，y が隣接２整数となるのは　$(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$　のみ

$f(3,\ 2)=-5$，$f(4,\ 3)=-3$　より求める **$\boldsymbol{a}$ の最大値は　−3　（$\boldsymbol{x=4,\ y=3}$ のとき）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　座標平面上で円C：$x^2+(y-4)^2=16$　上の異なる2点P，Qに対し，線分PQを1：3に内分する点をMとする．下の問いに答えよ．

⑴　点Pを原点に固定して，点Qを円C上で動かしたときの点Mの軌跡を求めよ．

⑵　2点P，Qが円C上を動くとき，点Mが動く範囲を図示せよ．

⑴　Q$(s,\ t)$とおくと　M$\left(\dfrac{s}{4},\ \dfrac{t}{4}\right)$　　M$(X,\ Y)$とすると

$X=\dfrac{s}{4}$，$Y=\dfrac{t}{4}$　　すなわち　$s=4X$，$t=4Y$

$(s,\ t)$は円C上の点より

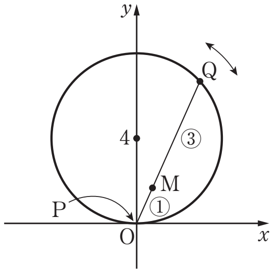
$(4X)^2+(4Y-4)^2=16$　　$16X^2+16(Y-1)^2=16$

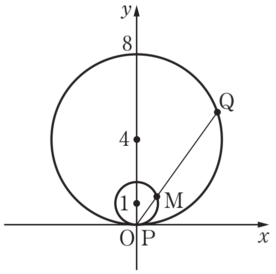
$X^2+(Y-1)^2=1$

$(s,\ t)\neq(0,\ 0)$より　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

よって　求める軌跡は

中心(0，1)　半径1の円　（ただし(0，0)を除く）





⑵　⑴の円は点Pで円Cと接する円である．

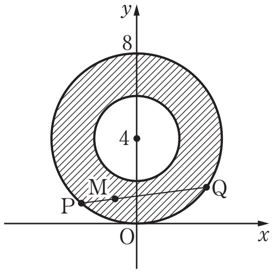
よって点Pが円C上の任意の点のとき，

点Qを動かしたときのMの軌跡は，

点Pで円Cに接する半径1の円である（点Pを除く）．

よって求める点Mの動く範囲は右図斜線部分（境界は

円$x^2+(y-4)^2=4$を含み，円$x^2+(y-4)^2=16$を含まない）



3 ［2］　2つの関数　$y=ax^2+b$，$y=|(x-1)(x+1)|$　のグラフが共有点をもつための必要十分条件をa，bを用いて表し，点$(a,\ b)$の存在する領域を座標平面上に図示しなさい．

［2］　$ax^2+b=|(x-1)(x+1)|$　……①　について

(i)　$x\leqq-1,\ 1\leqq x$　のとき

①より　$ax^2+b=(x-1)(x+1)$

$(a-1)x^2=-b-1$

$a=1$のとき　$b=-1$であれば　xは任意

$a\neq1$のとき　$x^2=\dfrac{-b-1}{a-1}$　　$x^2\geqq1$より　$\dfrac{-b-1}{a-1}\geqq1$

よって　**$a>1$のとき　$b\leqq-a$　　$a<1$のとき　$b\geqq-a$**　　……②

(ii)　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

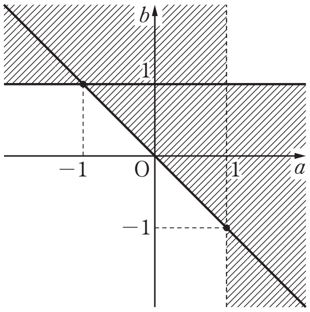
①より　$ax^2+b=-(x-1)(x+1)$

$(a+1)x^2=-b+1$

$a=-1$ のとき　$b=1$ であれば　x は任意

$a \neq -1$ のとき　$x^2=\dfrac{-b+1}{a+1}$　　$0 \leqq x^2 \leqq 1$ より　$0 \leqq \dfrac{-b+1}{a+1} \leqq 1$

よって　**$a>-1$ のとき　$-a \leqq b \leqq 1$　　$a<-1$ のとき　$1 \leqq b \leqq -a$**　……③



$(a,\ b)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$　および②または③より
求める領域は右図斜線部分.
境界は実線部分を含み
点線部分は含まない.

第41講　総合問題(9)

※この講の練習問題より「実践問題」となります．講義問題の内容と必ずしも一致しません．

a を実数とする．x に関する方程式　$\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3)$　……①　が異なる2つの実数解をもつとき，a の取りうる値の範囲を求めたい．

①の真数条件により，$a>$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき $x>\dfrac{a+3}{4}$　　$a\leqq$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき $x>1$ である．

このとき①を変形すると　$(x-1)^{\boxed{\text{イ}}}=4x-a-3$　……②　である．左辺，右辺をそれぞれ x の関数と考えると，2つの関数のグラフの共有点の x 座標のうち，①の真数条件を満たすものが2つ存在すればよい．$a>$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき　グラフから②が異なる2実数解をもてばそれは必ず真数条件を満たすことがわかり，このとき a の取りうる値の範囲は

$\boxed{\text{ウ}}<a<\boxed{\text{エ}}$ である．同様に $a\leqq$ $\boxed{\text{ア}}$ のときも考えて，求める a の範囲は

$\boxed{\text{オ}}<a<\boxed{\text{カ}}$ である

真数は正であることより　$x>1$　かつ　$x>\dfrac{a+3}{4}$　である．

よって　$1<\dfrac{a+3}{4}$　つまり　$a>\mathbf{1}$　のとき　真数条件は　$x>\dfrac{a+3}{4}$

$a\leqq 1$ のとき　真数条件は　$x>1$　である．

このもとで，①は　$\log_3(x-1)=\dfrac{\log_3(4x-a-3)}{\log_3 9}=\dfrac{1}{2}\{\log_3(4x-a-3)\}$

つまり　$\log_3(x-1)^2=\log_3(4x-a-3)$　より　$(x-1)^{\mathbf{2}}=4x-a-3$　……②　と変形できる．

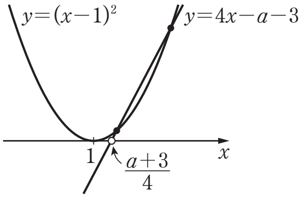
$y=(x-1)^2$ と $y=4x-a-3$ のグラフの共有点について考える．

$a>1$ のとき

グラフより　②すなわち $x^2-6x+a+4=0$ が異なる2つの実数解をもてば，それは必ず真数条件　$x>\dfrac{a+3}{4}$　を満たす．

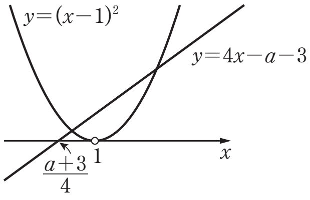
よって判別式 $D>0$ より　$9-(a+4)>0$　　$a<5$

したがって　$\mathbf{1<a<5}$



$a\leqq 1$ のとき

グラフより　②は $x>1$ に異なる2解をもたず不適．



以上より　求める a の範囲は　$\mathbf{1<a<5}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。